

# 冷却に関するニュートンの経験則

熱湯（温度， $T$ ）を入れた容器を室温（ $T_{\text{room}}$ ）に放置すると，熱湯と室内の空気の間で，熱交換が生じる．熱湯の温度は最終的に室温に等しくなる．熱い飲み物が冷めるのを待つたびに，あなたはこの冷却過程を観測する．この実験では，熱湯の冷却を調べ，その冷却過程を説明するモデルを構築することが目標である．そのモデルにより，熱湯が室温まで冷めるまでの時間の長さをあなたは予測することができる．

アイザック・ニュートンは，熱交換の速さが二つの物体の温度差（ $T_{\text{diff}}$ ）に比例すると仮定して，この冷却過程をモデル化した．ここで，比例定数を $k$ と置くと，水が室温まで冷えるときの冷却率は次式で与えられる．

$$\text{冷却率} = -kT_{\text{diff}}$$

この単純な仮定から，ニュートンは温度変化が時間の指数関数であることを示し，次式で予測できることを示した．

$$T_{\text{diff}} = T_0 e^{-kt}$$

ここで， $T_0$ は最初の温度差である．科学では，指数関数的な変化は一般的である．変化率が変化の大きさに比例するシステムは，指数関数的な振る舞いをする．

この実験を短時間に終わらせるためには，実験試料である熱湯の温度を室温よりも $30^\circ\text{C}$ 程高くし，その量を少なくすることである．熱湯の冷却を監視し，記録するために温度センサーが使われる．

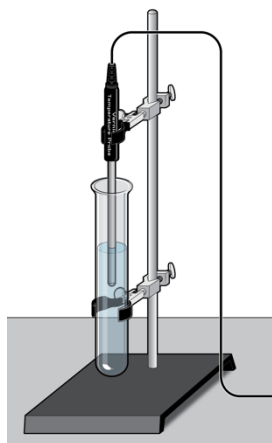


図1

## 目的

- ・ 熱湯の冷却過程を監視し，記録するために温度センサーを使う．
- ・ 記録した水温のデータを用いて，冷却に関するニュートンの法則を検証する．
- ・ 熱湯の冷却過程に於ける温度を冷却に関するニュートンの法則を用いて，予想する．

## 準備

LabQuest  
LabQuestソフトウェア  
バーニア社製温度センサー

試験管（ $20 \times 150 \text{ mm}$ ）  
熱湯（ $20 \text{ mL}$ ， $50 \sim 60^\circ\text{C}$ ）  
鉄製スタンド

## 万能クランプ (2)

**事前の問題**

コーヒーの愛好家は、次のようなジレンマにある。彼女はクリームを加えた熱いコーヒーを10分間、飲むことができないが、飲む時、可能な限り熱いコーヒーが飲みたい。コーヒーに室温のクリームを直ちに加え、かき回すことと、コーヒーを10分間冷まして、その後にクリームを入れて、かき回すのではどちらがいいか？10分後のコーヒーの温度は、どちらの方が高いか？

**手順**

1. LabQuestのチャンネル1 (CH1) に温度センサーを接続する。そして、メインメニューのFileから、Newを選択する。
2. メーター画面のRateをタップして、記録頻度 (rate) を1分間に20回 (20 samples/minute) , 記録時間 (duration) を20分に設定する。
3. 室温を決定するために、熱源や太陽光から温度センサーを遠ざけ、空気中に支持する。温度センサーの値を監視し、値が安定したら読み取り、室温としてデータ表に記録する。
4. 万能クランプを用いて、温度センサーを鉄製スタンドの上方に固定する。あなたは後の手順で温度センサーの位置を下方に移動させる。
5. 熱湯20mLが入った試験管を指導者から受け取る。または、熱湯蛇口から試験管に注ぐ。そして、もし必要なら、試験管に水を入れて、アルコールランプなどで加熱する。図1に示したように、万能クランプを用いて、試験管を鉄製スタンドに固定する。
6. 温度センサーの位置を下げて、水の中に入れる。温度センサーの先端が、試験管内の水の中央部分にくるようにする。温度センサーが、試験管の底や壁面に接しないようにする。
7. 温度センサーの値が熱湯の温度に等しくなるまで、約10秒間待つ。そして、冷却データを記録する。
  - a. データの記録を開始する。
  - b. 水温が室温に等しいか、 $5^{\circ}\text{C}$ 以内の温度になるまで20分間、データを記録する。もちろん、温度が室温まで下がったら、データの記録を途中で中止してよい。
8. データの記録が終了したら、時間に対する温度のグラフが表示される。
  - a. グラフに表示されたデータの値を調べるには、グラフ上でタップする。タップしたそれぞれのデータについて、時間と温度の値が、グラフの右側に表示される。
  - b. グラフを印刷するか、その特徴を記録する。

## データ表

①

室温 (°C)	
---------	--

②

A	
B	
C	

## 考察

- あなたのデータを指数関数 ( $A \cdot \exp(-Cx) + B$ ) に回帰させる.
  - Analyze (分析) メニューから, Curve fit (曲線回帰) を選択し, 変数メニューの ☐ Temperature (温度) にチェックを入れる.
  - 表示される回帰式 (Fit Equation ▽) のプルダウンメニューから, 自然指数 (Natural Exponent) を選択する.
  - 表示されるパラメータ A と B, C の値をデータ表に記入して, OK を選択する.
- 冷却に関するニュートンの法則は, 次式で与えられる.

$$T_{diff} = T_0 e^{-kt}$$

ここで,  $T_{diff}$  は熱湯の温度 ( $T$ ) と室温 ( $T_{room}$ ) との差,  $T_0$  は最初の熱湯と室温の温度差である. つまり, 最初の温度差 ( $T_{diff}, t = 0$ ) は,  $T_0$  である次の関係が成り立つ.

$$T - T_{room} = T_0 e^{-kt}$$

これらの式を変形して, 次式を得る.

$$T = T_0 e^{-kt} + T_{room}$$

LabQuest で曲線回帰した結果の x と y, A, B, C は, この式の  $t, T, T_0, T_{room}, k$  に対応する. 係数 A と B, C の単位はそれぞれどうなるか? B の値を測定した室温と比較せよ. データの記録中, 温度センサーの値は室温に等しくなったか?

- 実験開始時 ( $t = 0$ ) の  $e^{-kt}$  の値を算出せよ.
- 時間 ( $t$ ) の値が非常に大きな値になると, 温度差の値はどのような値になるか? この時の水温の値はどうなるか?
- もう一度同様の実験を行う時,  $k$  の値が小さくなるようにするには, あなたの実験装置をどのようにする必要があるか?
- あなたの求めた実験式を用いて, 12分後の温度を算出せよ. そして, 計算値と測定値を比較せよ.
- あなたの実験式を用いて, 試験管の水温が室温よりも  $1^\circ\text{C}$  だけ高い状態まで下がる時間を予測せよ.
- もしも, 実験開始時の温度差を半分にすると, 室温よりも  $1^\circ\text{C}$  だけ高い状態まで下がるのに必要な時間も半分になるか?

## 発展

1. 試験管の水温が室温にほぼ等しくなるように，データ記録時間を長くする．これには30分以上かかるだろう．指数関数モデルは，その程度まで時間を長くしても回帰するか？
2. 事前問題に書かれた実験を行うために温度センサーを使う．ニュートンの用いた冷却に関する仮定により，実験結果を説明せよ．
3. 異なる材質で作られたコーヒークップを用いてこの実験を行うために温度センサーを使う．発砲スチロールのカップよりも瀬戸物のコーヒークップの方が，飲み物が速く冷めるか？**実験結果**（データ）の差が，カップの**材質**によることを保証するために，あなたはどのような変数を一定に保つ必要があるか？指数関数モデルのどの係数がコーヒークップの**材質**に関係しているか？
4. 液体の冷却に関する数学的モデルは，自然界における他の現象を説明するためにもまた利用できる．例えば，放射能や交流回路は同じように振る舞う．指数関数モデルにより表現できる他の現象を見付けよ．もし可能なら，あなたの実験室でその現象に関する測定を実行せよ．

## 出典

Kenneth Appel, John Gastineau, Clarence Bakken and David Vernier, " Physics with Vernier", MEASYRE.ANALYZE.LEARN™., 2009.

評価版のダウンロード先：[http://www.vernier.com/files/sample\\_labs/PWV-30-COMP-newtons\\_law\\_cooling.pdf](http://www.vernier.com/files/sample_labs/PWV-30-COMP-newtons_law_cooling.pdf)

## 注意

この資料には次の事項が含まれていない：

- ・安全に関する情報
- ・指導者のための基本情報
- ・学習指導要領（教育カリキュラム）との関係に関する情報
- ・実験を成功させるための留意点

## 式の導出

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_{room})$$

$$\frac{dT}{(T - T_{room})} = -k dt$$

$$\int_{T_0}^{T - T_{room}} \frac{dT}{(T - T_{room})} = \int_0^t -k dt$$

$$[\ln T]_{T_0}^{T - T_{room}} = -k [t]_0^t$$

$$\ln\left(\frac{T - T_{room}}{T_0}\right) = -kt$$

$$\left(\frac{T - T_{room}}{T_0}\right) = \exp(-kt)$$

$$T - T_{room} = T_0 \exp(-kt)$$

$$T = T_0 \exp(-kt) + T_{room}$$

## 実験結果の例

### データ表

①

室温 (°C)	22.8
---------	------

②

A	28.249
B	24.468
C	0.10006

### 考察

$$t = 0 \quad e^{-kt} = 1$$

$$t = \infty \quad e^{-kt} = 0$$